

同济-强基数学真题解析

一、数学单选题

1、 $\forall x \in A, \frac{1}{x-1} \geq 1$ 的否命题是_____

【解析】 $\exists x \in A, \text{s.t. } x = 1$ 或 $\frac{1}{x-1} < 1$.

2. $ae^a = b \ln b = 2, ab =$ _____

【解析】令 $b = e^c$, 则 $e^c \cdot c = 2 = a \cdot e^a$. 由 $ae^a = 2$, 知道 $a > 0$. 由 $b \ln b = 2$, 知 $b > 0$, 从而 $\ln b > 0$, 即 $c > 0$. 由于 $f(x) = e^x \cdot x$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上严格单调递增, 可知 $a = c$, 故 $ab = a \cdot e^c = a \cdot e^a = 2$.

3、 $(1-x+\frac{1}{x})^9$ 展开式中 x^6 的系数为_____

【解析】考虑 x^6 的来源, 可以是 9 个括号中选了 3 个 1, 6 个 $-x$, 也可能是选了 7 个 $-x$, 1 个 $\frac{1}{x}$, 1 个 1. 因此 x^6 前的系数是 $C_9^6 \cdot (-1)^6 + C_9^7(-1)^7 \cdot C_2^1 = 12$.

4、四边形 $ABCD$ 为平面四边形, $AC = 2, BD = 1$, 则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) =$ _____

【解析】记平行四边形对角线的交点为 O , 那么 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. 于是 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}) = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

5、甲乙进行二局两胜制的比赛, 每场比赛甲获胜概率为 $\frac{2}{3}$, 则甲获胜概率为_____

【解析】甲获胜只有三种情况, 分别计算概率并求和可得 $p = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

6、已知 $4a^2 + b^2 = 6a - a^2b^2 + 1$, 则 $a^2 + b^2 =$ _____ 【此题缺条件】

二、不定项选择题

1、过下列点可做 $f(x) = e^x$ 两条切线的是 ()

- A. (1;1) B. (2;4) C. (1;-1) D. $(-1; \frac{1}{2})$ E. $(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4})$

【解析】记切点为 $(t, f(t))$, 对应的切线为 $y - f(t) = e^t(x - t)$, 即 $y = e^t(x + 1 - t)$. 现在问题转化为: 给定点的坐标 (x_0, y_0) , 求关于 t 的方程 $y_0 = e^t(x_0 + 1 - t)$ 的解的个数. 解的个数和切线的条数是一样的.

① 当 $y_0 > 0$ 时, 对方程两边同时取自然对数: $\ln y_0 = t + \ln(x_0 + 1 - t) \triangleq g(t)$, 则

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{x_0 + 1 - t} = \frac{x_0 - t}{x_0 + 1 - t}. \text{ 当 } x_0 > t \text{ 时, } g'(t) > 0, g(t) \text{ 单调递增; 当 } x_0 < t < x_0 +$$

1 时, $g'(t) < 0, g(t)$ 单调递减. 故 $g(t) \leq g(x_0) = x_0$. 于是当 $\ln y_0 < x_0$ 时, 方程有两个解; $\ln y_0 = x_0$ 时, 有一个解; $\ln y_0 > x_0$ 时无解.

② 当 $y_0 < 0$ 时, 对方程两边同时取自然对数: $\ln(-y_0) = t + \ln(t - x_0 - 1) \triangleq g(t)$, 容易看出此时 $g(t)$ 关于 t 单调递增, 且 $g(t) \in (-\infty, +\infty)$. 此时有一个解.

依次考察题目选项, 只需找出 $y_0 > 0$ 且 $\ln y_0 < x_0$ 的选项. 经检验答案选 ABE.

2、集合 A 中仅有四个整数, 若 $B = \{X + Y | X \in A, Y \in A\}$, 则 $|B|$ 可以为 ()

- A.4 B.5 C.6 D.7 E.8

【解析】设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. 由 $2a_1 < a_1 + a_2 < 2a_2 < a_2 + a_3 < 2a_3 < a_3 + a_4 < 2a_4$ 可知 B 中至少有 7 个元素. 下面分别给出 $|B| = 7$ 和 $|B| = 8$ 的构造: 当 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 时, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 此时 $|B| = 7$; 当 $A = \{-1, 0, 1, 3\}$ 时, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$, 此时 $|B| = 8$. 故答案选选 DE.